Analiza Funkcjonalna

Bartosz Kwaśniewski

Faculty of Mathematics, University of Białystok

Wykład 3

Przestrzenie L^p dla $p \in [1, \infty)$

math.uwb.edu.pl/∼zaf/kwasniewski/pdf/skrypt.pdf

Przestrzenie L^p dla $p \in [1, \infty)$

Niech (Ω, Σ, μ) będzie ustaloną przestrzenią z miarą.

Przestrzeń funkcji całkowalnych w p-tej potędze:

$$L^p(\mu) := \{x : \Omega \to \mathbb{F} \text{ mierzalna} : \int_\Omega |x(t)|^p \, d\mu < \infty\}$$

o wartościach w ciele $\mathbb{F} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ wraz z działaniami

$$(x + y)(t) := x(t) + y(t), \qquad (\lambda x)(t) := \lambda x(t)$$

(działania określone punktowo!)

gdzie $x, y \in L^p(\mu)$, $\lambda \in \mathbb{F}$, jest przestrzenią liniową nad $\mathbb{F}$.

Na przestrzeni $L^p(\mu)$ określona jest tzw. p-**ta norma**

$$\|x\|_p := \left(\int_\Omega |x(t)|^p \, d\mu\right)^{\frac{1}{p}}$$

Uwaga: $\|x\|_p = 0 \iff \mu(\{t \in \Omega : x(t) \neq 0\}) = 0 \overset{def}{\iff} x \overset{\mu\text{-pw}}{=} 0$

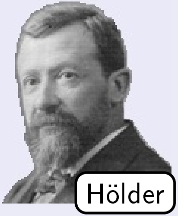
Twierdzenie (Nierówność Höldera)

Dla $1 < p, q < \infty$ takich, że $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ oraz $x \in L^p(\mu)$ i $y \in L^q(\mu)$

$$\|x \cdot y\|_1 \leqslant \|x\|_p \cdot \|y\|_q,$$

czyli

$$\int_\Omega |xy|\, d\mu \leqslant \left(\int_\Omega |x|^p\, d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_\Omega |y|^q\, d\mu\right)^{\frac{1}{q}}$$



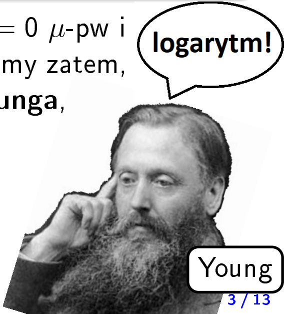
Równość zachodzi $\iff$ $|x|^p$ i $|y|^q$ są liniowo zależne μ-pw

(tzn. $\alpha|x|^p = \beta|y|^q$ μ-pw dla pewnych $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $(\alpha, \beta) \neq (0,0)$)

Dowód: Jeśli $\|x\|_p = 0$, to $x = 0$ μ-pw, skąd $x \cdot y = 0$ μ-pw i zachodzi trywialnie. Podobnie, gdy $\|y\|_q = 0$. Załóżmy zatem, $\|x\|_p \neq 0$ i $\|y\|_q \neq 0$. Zastosujemy **nierówność Younga**, która mówi, że dla dowolnych liczb $a, b > 0$ mamy

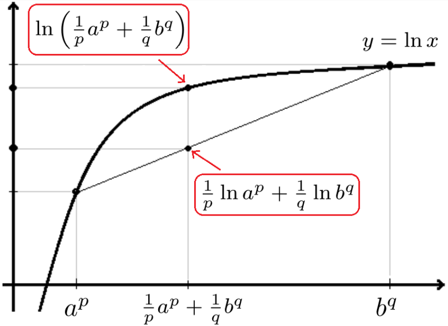
$$a \cdot b \leqslant \frac{1}{p} a^p + \frac{1}{q} b^q,$$

a która wynika z własności logarytmu:



$$\ln(ab) = \ln a + \ln b$$
$$= \frac{1}{p}\ln a^p + \frac{1}{q}\ln b^q$$
$$\leqslant \ln\left(\frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q\right),$$

nierówność wynika z **wklęsłości logarytmu**. Zdejmując *ln* otrzymujemy **nierówność Younga**. Równość zachodzi $\iff a^p = b^q$



Podstawiając $a = \frac{|x(t)|}{\|x\|_p}$ i $b = \frac{|y(t)|}{\|y\|_q}$ otrzymujemy

$$\frac{|x(t)y(t)|}{\|x\|_p\|y\|_q} \leqslant \frac{1}{p}\cdot\frac{|x(t)|^p}{\|x\|_p^p} + \frac{1}{q}\cdot\frac{|y(t)|^q}{\|y\|_q^q}, \qquad \text{dla każdego } t \in \Omega.$$

Całkując powyższą nierówność obustronnie

$$\frac{\int_\Omega |x(t)y(t)|\,d\mu}{\|x\|_p\|y\|_q} \leqslant \frac{1}{p}\cdot\frac{\int_\Omega |x(t)|^p\,d\mu}{\|x\|_p^p} + \frac{1}{q}\cdot\frac{\int_\Omega |y(t)|^q\,d\mu}{\|y\|_q^q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Mnożąc obustronnie przez $\|x\|_p\|y\|_q$ dostajemy $\|x\cdot y\|_1 \leqslant \|x\|_p\cdot\|y\|_q$.

Przy czym, $\|x\cdot y\|_1 = \|x\|_p\cdot\|y\|_q \iff \frac{|x(t)|^p}{\|x\|_p^p} = \frac{|y(t)|^q}{\|y\|_q^q}$ μ-pw.

$$\|x \cdot y\|_1 = \|x\|_p \cdot \|y\|_q \iff \|y\|_q^q \cdot |x|^p = \|x\|_p^p \cdot |y|^q \ \mu\text{-pw}$$

$$\iff |x|^p \text{ i } |y|^q \text{ są liniowo zależne } \mu\text{-pw}$$

„$\Leftarrow$" Jeśli $\alpha|x|^p = \beta|y|^q$ μ-pw, to całkując mamy $\alpha\|x\|_p^p = \beta\|y\|_q^q$, skąd jeśli $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$, to $\|y\|_q^q \cdot |x|^p = \|x\|_p^p \cdot |y|^q$ μ-pw. ■

Twierdzenie (Nierówność Minkowskiego)

Dla dowolnego $p \geqslant 1$ oraz $x, y \in L^p(\mu)$

$$\|x + y\|_p \leqslant \|x\|_p + \|y\|_p.$$

Minkowski

Dowód: Dla $p = 1$ dowód jest łatwy:

$$\|x + y\|_1 = \int_\Omega |x + y| \, d\mu \overset{\text{N.Trójkąta}}{\leqslant} \int_\Omega |x| + |y| \, d\mu = \int_\Omega |x| \, d\mu + \int_\Omega |y| \, d\mu$$

$$= \|x\|_1 + \|y\|_1.$$

Załóżmy, że $p > 1$. Niech $q := p/(p-1)$. Wtedy $1/p + 1/q = 1$.

Możemy zatem zastosować nierówność Höldera!

$$\|x+y\|_p^p = \int_\Omega |x+y|^p \, d\mu = \int_\Omega |x+y| \cdot |x+y|^{p-1} \, d\mu$$

$$\overset{\text{N.Trójkąta}}{\leqslant} \int_\Omega |x| \cdot |x+y|^{p-1} \, d\mu + \int_\Omega |y| \cdot |x+y|^{p-1} \, d\mu$$

$$\overset{\text{N.Höldera x2}}{\leqslant} \|x\|_p \cdot \left(\int_\Omega |x+y|^{q(p-1)} d\mu\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$+ \|y\|_p \cdot \left(\int_\Omega |x+y|^{q(p-1)} d\mu\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\overset{q(p-1)=p}{=} \|x\|_p \cdot \|x+y\|_p^{p/q} + \|y\|_p \cdot \|x+y\|_p^{p/q}$$

$$= (\|x\|_p + \|y\|_p) \cdot \|x+y\|_p^{p/q}.$$

Dzieląc obie strony przez $\|x+y\|_p^{p/q}$ i stąd, że $p - p/q = 1$ mamy

$$\|x+y\|_p = \|x+y\|_p^{p-p/q} = \frac{\|x+y\|_p^p}{\|x+y\|_p^{p/q}} \leqslant \|x\|_p + \|y\|_p. \quad \blacksquare$$

Konwencja:

W przestrzeni $L^p(\mu)$ utożsamiamy funkcje równe μ-pw
(formalnie elementami $L^p(\mu)$ są klasy abstrakcji relacji $y \overset{\mu\text{-pw}}{=} x$).
Zatem $(L^p(\mu), \|\cdot\|_p)$ jest przestrzenią unormowaną!

Tw. $L^p(\mu)$ jest przestrzenią Banacha dla każdego $p \in [1, \infty)$.

Dowód: Niech $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq L^p(\mu)$ ciąg Cauchy. Przechodząc do podciągu możemy założyć, że $\|x_n - x_m\|_p \leqslant \frac{1}{4^n}$ dla $m \geqslant n$.

Lem. Wyk1

Pokażemy, że zbiór

$$A := \{t \in \Omega : \forall_N \exists_{n>N} \, |x_n(t) - x_{n+1}(t)| \geqslant 1/2^n\}$$

ma miarę zero oraz ciąg $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ jest zbieżny punktowo na $\Omega \setminus A$.

Zapiszmy $A = \bigcap\limits_{N=1}^{\infty} \bigcup\limits_{n=N}^{\infty} A_n$, gdzie $A_n := \{t : |x_n(t) - x_{n+1}(t)| \geqslant \frac{1}{2^n}\}$.
Zauważmy, że

$$\frac{1}{2^{np}} \mu(A_n) \leqslant \int_{A_n} \underbrace{|x_n - x_{n+1}|^p}_{\geqslant (1/2^n)^p} \, d\mu \leqslant \|x_n - x_{n+1}\|_p^p \leqslant \frac{1}{4^{np}},$$

skąd $\mu(A_n) \leqslant \frac{1}{2^{np}}$. Zatem

$$\mu(A) \leqslant \mu\Big(\bigcup_{n=N}^{\infty} A_n\Big) \leqslant \sum_{N=n}^{\infty} \mu(A_n) \leqslant \sum_{n=N}^{\infty} \frac{1}{2^{np}} \longrightarrow 0, \quad \underset{\text{jako ogon szeregu zbieżnego}}{\text{przy } N \to \infty}$$

Czyli $\mu(A) = 0$. Zauważmy dalej, że

$$t \in \Omega \setminus A \iff \exists_N \forall_{n \geqslant N} |x_n(t) - x_{n+1}(t)| < \tfrac{1}{2^n}$$

$$\implies \exists_N \forall_{m \geqslant n \geqslant N} |x_n(t) - x_m(t)| < \sum_{k=n}^{m-1} \frac{1}{2^k} \xrightarrow{n,m\to\infty} 0.$$

Zatem dla $t \in \Omega \setminus A$ ciąg liczbowy $\{x_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ jest Cauchy, a więc jest zbieżny. Połóżmy $x(t) := \lim_{n\to\infty} x_n(t)$, gdy $t \in \Omega \setminus A$, oraz $x(t) = 0$, gdy $t \in A$. Wtedy $x_n \xrightarrow{\mu\text{-pw}} x$.

$$t \in \Omega \setminus A \iff \exists_N \forall_{n \geqslant N} |x_n(t) - x_{n+1}(t)| < \tfrac{1}{2^n}$$

$$\implies \exists_N \forall_{m \geqslant n \geqslant N} |x_n(t) - x_m(t)| < \sum_{k=n}^{m-1} \tfrac{1}{2^k} \xrightarrow{n,m\to\infty} 0.$$

Zatem dla $t \in \Omega \setminus A$ ciąg liczbowy $\{x_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ jest Cauchy, a więc jest zbieżny. Połóżmy $x(t) := \lim_{n\to\infty} x_n(t)$, gdy $t \in \Omega \setminus A$, oraz $x(t) = 0$, gdy $t \in A$. Wtedy $x_n \xrightarrow{\mu\text{-pw}} x$. Sprawdzamy zbieżność w normie:

$$\|x - x_n\|_p^p = \int_\Omega |x(t) - x_n(t)|^p \, d\mu = \int_{\Omega\setminus A} \lim_{m\to\infty} |x_m(t) - x_n(t)|^p \, d\mu$$

$$\overset{\text{Fatou}}{\leqslant} \liminf_{m\to\infty} \int_\Omega |x_m - x_n|^p \, d\mu \leqslant \sup_{m \geqslant n} \|x_n - x_m\|_p^p \leqslant (1/4)^{pn} \longrightarrow 0.$$

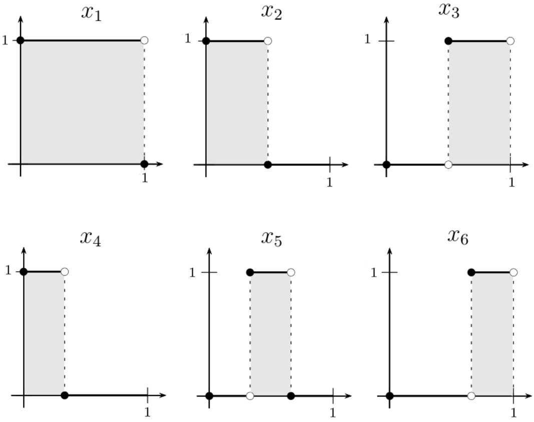
Czyli $x_n \xrightarrow{\|\cdot\|_p} x$. Skoro $\|x\|_p \leqslant \|x - x_n\|_p + \|x_n\|_p < \infty$, to $x \in L^p(\mu)$. ■

Uwaga. Z dowodu wynika, że

$$x_n \xrightarrow{\|\cdot\|_p} x \implies \exists_{\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}} \; x_{n_k} \xrightarrow{\mu\text{-pw}} x.$$

Natomiast na ogół $x_n \xrightarrow{\|\cdot\|_p} x \;\not\Longrightarrow\; x_n \xrightarrow{\mu\text{-pw}} x$.

Prz. (Wędrujący garb) Na przestrzeni $L^p[0,1] = L^p(\lambda)$, gdzie λ miara Lebesgue'a na odcinku $[0,1]$ ustawmy ciągi k-elementowe $x_i^{(k)} = \mathbb{1}_{[\frac{i-1}{k}, \frac{i}{k})}$, $i = 1, \dots, k$, $k \in \mathbb{N}$, w jeden ciąg $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$:



$$x_1 = \mathbb{1}_{[0,1)},\ x_2 = \mathbb{1}_{[0,\frac{1}{2})},$$
$$x_3 = \mathbb{1}_{[\frac{1}{2},1)},\ x_4 = \mathbb{1}_{[0,\frac{1}{3})},$$
$$x_5 = \mathbb{1}_{[\frac{1}{3},\frac{2}{3})},\ x_6 = \mathbb{1}_{[\frac{2}{3},1)}$$
$$x_7 = \mathbb{1}_{[0,\frac{1}{4})},\ x_8 = \mathbb{1}_{[\frac{1}{4},\frac{1}{2})}$$
$$x_9 = \mathbb{1}_{[\frac{1}{2},\frac{3}{4})},\ x_8 = \mathbb{1}_{[\frac{3}{4},1)}$$
$$\dots$$

Wtedy $x_n \xrightarrow{\|\cdot\|_p} 0$, bo $\|x_i^{(k)}\|_p = \left(\int_{[0,1]} \mathbb{1}_{[\frac{i-1}{k},\frac{i}{k})}\, d\lambda\right)^{\frac{1}{p}} = (1/k)^{1/p} \to 0$ przy $k \to \infty$. Ale dla każdego $t \in [0,1)$ ciąg liczbowy $\{x_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ jest rozbieżny (ma dwa punkty skupienia 0 i 1). Czyli $x_n \overset{\mu\text{-pw}}{\not\longrightarrow} 0$.

Całka względem miary liczącej, to suma!
Ciągi to funkcje na zbiorze $\mathbb{N}$ lub $\{1, ..., n\}$!

Prz. Jeśli $\Omega = \mathbb{N}$ i μ jest miarą liczącą, to $L^p(\mu)$, $p \in [1, \infty)$, jest **przestrzenią ciągów sumowalnych w p-tej potędze**:

$$\ell^p := \left\{ x = (x(1), ..., x(n), ...) \in \mathbb{F}^{\mathbb{N}} : \sum_{k=1}^{\infty} |x(k)|^p < \infty \right\}$$

z działaniami po współrzędnych i normą

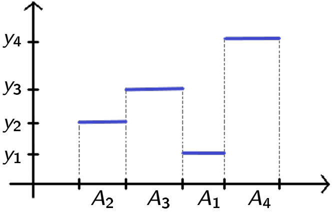
$$\|x\|_p := \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x(k)|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

Prz. Jeśli $\Omega = \{1, ..., n\}$ i μ miara licząca, to $L^p(\mu) \cong \mathbb{F}^n$ jest n-wymiarową przestrzenią Banacha z normą

$$\|x\|_p := \left(\sum_{k=1}^{n} |x(k)|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

Funkcje charakterystyczne zbiorów o mierze skończonej rozpinają **przestrzeń całkowalnych funkcji prostych**

$$\mathcal{E}(\mu) := \operatorname{span}\{\mathbb{1}_{A_k} : A_k \in \Sigma, \mu(A_k) < \infty\}$$
$$= \left\{ \sum_{k=1}^{n} y_k \mathbb{1}_{A_k} : y_k \in \mathbb{F}, \mu(A_k) < \infty \right\}$$



Stw. Dla $p \in [1, +\infty)$, $\mathcal{E}(\mu)$ jest gęstą podprzestrznią $L^p(\mu)$. Zatem $L^p(\mu) = \overline{\mathcal{E}(\mu)}^{\|\cdot\|_p}$ jest uzupełnieniem $\mathcal{E}(\mu)$ w normie

$$\|x\|_p := \left(\int_\Omega |x(t)|^p \, d\mu \right)^{\frac{1}{p}}$$

Dowód: Dla $x \in L^p(\mu)$ istnieje $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{E}(\mu)$ takie, że $x_n \to x$ punktowo oraz $|x_n| \leqslant |x|$. Skoro $|x - x_n|^p \leqslant 2|x|^p \in L^1(\mu)$

$$\|x - x_n\|_p^p = \int_\Omega |x(t) - x_n(t)|^p \, d\mu \xrightarrow{\text{zbieżnośc zmajoryzowana}} 0. \qquad \blacksquare$$

Dotychczas poznane przestrzenie Banacha (ściągawka)

Ozn.	**przestrzeń Banacha**	**norma**
$C_b(\Omega)$	funkcje ciągłe i ograniczone	$\|x\|_\infty = \sup\limits_{t\in\Omega} \|x(t)\|$
$C_0(\Omega)$	funkcje ciągłe, znikające w nieskończoności	$\|x\|_\infty = \max\limits_{t\in\Omega} \|x(t)\|$
$L^p(\mu)$	„funkcje” całkowalne w p-tej potędze	$\|x\|_p = \left(\int\limits_\Omega \|x(t)\|^p \, d\mu\right)^{\frac{1}{p}}$
ℓ^∞	ciągi ograniczone	$\|x\|_\infty = \sup\limits_{k\in\mathbb{N}} \|x(k)\|$
ℓ^p	ciągi sumowalne w p-tej potędze	$\|x\|_p = \left(\sum\limits_{k=1}^{\infty} \|x(t)\|^p\right)^{\frac{1}{p}}$
c	ciągi zbieżne	$\|x\|_\infty = \max\limits_{k\in\mathbb{N}} \|x(k)\|$
c_0	ciągi zbieżne do zera	$\|x\|_\infty = \max\limits_{k\in\mathbb{N}} \|x(k)\|$

Dla $1 \leqslant p < q < \infty$ mamy

$$\ell^1 \subseteq \ell^p \subseteq \ell^q \subseteq c_0 \subseteq c \subseteq \ell^\infty \qquad \left(\ell^p = \overline{c_{00}}^{\|\cdot\|_p}\right)$$

Natomiast jeśli $\mu(\Omega) < \infty$ (miara skończona), to

$$L^q(\mu) \subseteq L^p(\mu) \subseteq L^1(\mu) \qquad \left(L^p(\mu) = \overline{\mathcal{E}(\mu)}^{\|\cdot\|_p}\right)$$